

# 3D-GIS 中空间三角平面的不确定研究

蔡剑红<sup>1)</sup> 文鸿雁<sup>1),2)</sup>

<sup>1)</sup>(桂林工学院土木工程系, 广西桂林 541004) <sup>2)</sup>(武汉大学测绘学院, 武汉 430079)

**摘要** 数据质量直接影响着 GIS 应用、分析以及决策的正确性和可靠性,而目前对三维空间数据的不确定性研究不多。为此以 3D-GIS 中空间平行四边形空间点的估计精度为研究对象,研究了空间三角平面内,三角平面的边以及三角平面外一定范围内任意点的精度,同时给出了空间三角平面面积及其法向量的不确定性等计算方法及估计公式。分析表明,由 3 个不在同一直线上的空间点构成的三角平面内任意点的精度至少要高于 3 个角点其中一点的精度;落在三角平面的边上点的精度至少要高于确定该直线元的两控制点其中一个点的精度;而落在三角平面外的点的精度则明显降低,而且这种三角平面上任意点的误差椭球三轴半径及其方向既与控制点的方差协方差有关,又与它在平面内的位置有关。

**关键词** 地理信息系统(420·3040) 空间平行四边形 空间三角平面 不确定性

**中图分类号**: TP391.4 P208 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2003)09-1073-06

## Error Research of Spatial Triangle Plane of 3D-GIS

CAI Jian-hong<sup>1)</sup>, WEN Hong-yang<sup>1),2)</sup>

<sup>1)</sup>(Civil Engineering Department, Guilin Institute of Technology, Guilin Guangxi 541004)

<sup>2)</sup>(School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079)

**Abstract** Data quality influences directly on correctness and reliability of application, analyzing, decision-making of GIS, at present there is not much research on error of 3-D spatial data. This paper adopts spatial parallelogram to estimate uncertainty of arbitrary points inside and outside the spatial triangle plane. The estimate formulae of uncertainty of spatial triangle plane and normal vector are deduced. It indicates that spatial triangle plane constructed by three spatial points being not in the same beeline, the precision of arbitrary points inside its interior is higher than that of one of the three points at least. The precision of points on the margin of triangle plane is higher than that one of the two extreme points of the beeline at least. The precision of points outside the spatial triangle plane is distinctively lower. Triaxiality radius and direction of error ellipsoid of arbitrary points in spatial triangle plane is relative to variance and covariance, and to its position of inside this plane.

**Keywords** Spatial parallelogram, Spatial triangle plane, Error

## 0 前言

空间数据的质量控制在 GIS 中具有非常重要的作用,它是 GIS 存在和发展的不可缺少的条件。随着 GIS 在环境仿真、城市规划、气象学、自然灾害预测预报、地质采矿等领域的广泛应用,空间数据库日渐庞大,因此空间数据质量的好坏直接影响着 GIS 应用、分析、决策的正确性和可靠性<sup>[1~6]</sup>。

随着“数字地球”,“数字城市”的提出和迅速发展,

其要求对地球空间进行三维描述,这就迫切需要对三维空间数据质量问题展开一系列的研究。三维描述的对象不外乎自然地物和人工建筑物,其中,由于地形复杂而不规则,适于用三角形网来描述。描述时,可采用面向对象技术,将空间目标抽象为点、线、面和体 4 种类型,其中面目标由三角形网表示,包括平面三角形网和空间立体三角形网<sup>[2,4]</sup>。对空间数据中点、线、面和体的不确定模拟不仅可进行可视化表示,而且在 GIS 应用中还可以加入不确定性可视化图标和界面。

基金项目:广西壮族自治区科技资助项目(桂科攻 03301087)

收稿日期:2002-09-05;改回日期:2003-04-07

不规则三角网(TIN)是 GIS 应用非常广泛的模型,它是通过建立离散点之间的空间关系,按一定规则将离散点连接成覆盖整个区域,且互不重叠、结构最佳的三角形。TIN 对于复杂表面的表述具有较高的精度,可为地表、地层及其结构提供精确的描述,特别是对复杂的地球表面、复杂的地带或岩石断层处,TIN 可以用于进行形象的、多视角的、全方位的、多层面的描述<sup>[7]</sup>。

本文的重点是采用空间平行四边形对三维 TIN 空间数据的不确定性研究。

## 1 空间平面上点的不确定性估计及可视化实现

### 1.1 空间三角平面内外任意点的精度分析

由 3 个不在同一直线上的空间点  $P_0, P_1, P_2$  可以构成一个空间平面,该空间平面是由以空间点  $P_0, P_1, P_2$  组成的两个向量为边的一个平行四边形,其可用参数方程表达如下

$$\begin{cases} x(u, w) = x_0 + (x_1 - x_0)u + (x_2 - x_0)w \\ y(u, w) = y_0 + (y_1 - y_0)u + (y_2 - y_0)w \\ z(u, w) = z_0 + (z_1 - z_0)u + (z_2 - z_0)w \end{cases} \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq w \leq 1) \quad (1)$$

空间三角平面是由 3 个点两两相连而成,是该平行四边形的一部分。该空间平行四边形不但可以估计空间三角平面内任意点的精度,也可以估计空间三角平面外一定范围内的任意点的精度(以平面内均质且各向同性为假设)。

已知 3 个不在同一直线上的空间点  $P_0, P_1, P_2$ , 可以用其方差协方差阵来估计由该 3 点所组成的平行四边形平面中任意点的精度。而以不在同一直线上的 3 个空间点  $P_0, P_1, P_2$  组成的两个向量为平行四边形边的方向,可以有 3 种不同的平行四边形的组合(相当于  $u, w$  可以取 0 到 1 的正值,也可取 0 到 1 的负值),现在讨论以向量  $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}$  为边所作的平行四边形,其中包含了空间三角平面,这可以估计三角面内、三角面的边上以及三角面外的平行四边形平面内的任意点的精度。

用 Matlab 编程实现,首先求出平行四边形中任意点的方差协方差阵,然后通过该方差阵即可求得该

```
A = [1 - u - w 0 0 u 0 0 w 0 0; 0 1 - u - w 0 0 u 0 0 w 0; 0 0 1 - u - w 0 0 u 0 0 w];
Dxixi = A * Dxx * AT
[vi, di] = eig(Dxixi)
```

任意点的误差椭圆半径和方向,并可进行可视化显示。

三角平面上任意点  $p_{u,w}$  关于确定该三角平面的已知点  $p_i (i=0, 1, 2)$  的误差为:

$$\begin{cases} \Delta x(u, w) = \Delta x_0 + (\Delta y_1 - \Delta x_0)u + (\Delta y_2 - \Delta x_0)w \\ \Delta y(u, w) = \Delta y_0 + (\Delta y_1 - \Delta y_0)u + (\Delta y_2 - \Delta y_0)w \\ \Delta z(u, w) = \Delta z_0 + (\Delta z_1 - \Delta z_0)u + (\Delta z_2 - \Delta z_0)w \end{cases} \quad (2)$$

式(2)可写成

$$\begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{bmatrix} = A X^T \quad (3)$$

其中,  $X = [x_0 \ y_0 \ z_0 \ x_1 \ \dots \ z_2]_{1 \times 9}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 - u - w & 0 & 0 & u & 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 1 - u - w & 0 & 0 & u & 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 1 - u - w & 0 & 0 & u & 0 & 0 & w \end{bmatrix}$$

A 为空间三角平面上任意点的误差  $(\Delta x_{(u,w)}, \Delta y_{(u,w)}, \Delta z_{(u,w)})$  关于确定该三角平面已知点的点位误差  $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$  的系数矩阵。根据误差传播公式<sup>[8]</sup>,可求得平行四边形上任意点的方差协方差阵:

$$D_{x_i x_i} = A D_{xx} A^T \quad (4)$$

$$\text{其中, } D_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_0}^2 & \sigma_{x_0 y_0} & \sigma_{x_0 z_0} & \sigma_{x_0 x_1} & \dots & \sigma_{x_0 z_2} \\ & \sigma_{y_0}^2 & \sigma_{y_0 z_0} & \sigma_{y_0 x_1} & \dots & \sigma_{y_0 z_2} \\ & & \sigma_{z_0}^2 & \sigma_{z_0 x_1} & \dots & \sigma_{z_0 z_2} \\ & & & \sigma_{x_1}^2 & \dots & \sigma_{x_1 z_2} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \sigma_{z_2}^2 \end{bmatrix}_{9 \times 9}$$

已知的观测值向量  $X = [x_0 \ y_0 \ z_0 \ x_1 \ \dots \ z_2]^T$ ,  $D_{xx}$  为 X 的协方差阵。

若对由式(4)求得的  $D_{x_i x_i}$  求特征值和特征向量,则特征值分别对应误差椭球的 3 个轴长,且与特征值对应的特征向量就确定了各轴的方向。特征向量正交化后,可得到

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \chi_1 & \cos \chi_2 & \cos \chi_3 \end{bmatrix}$$

其中,与特征值  $\lambda_i$  对应的特征向量为  $[\cos \alpha_i \ \cos \beta_i \ \cos \chi_i] (i=1, 2, 3)$ , 且满足

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \chi = 1 \quad (5)$$

然后再对误差椭圆进行旋转和平移,主要的 Matlab 程序实现如下:

```
%Dxixi 为平行四边形上任意点的方差协方差阵
%vi 为与特征值对应的特征向量, ve 为特征值
```



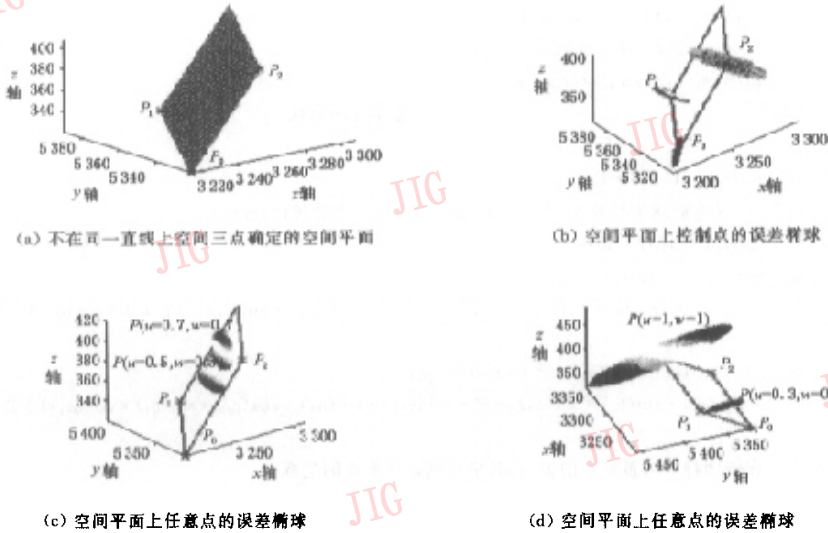


图1 空间平行四边形中任意点的误差分析  
(为得到较好的视觉效果,对图1(a)改变视角到(-111.5°,44°),其他3幅均为(-38.5°,44°))

根据表1的数据,通过对空间平行四边形中任意点的方差协方差阵  $D_{x_i}$  与3个控制点的方差协方差阵  $D_{x_j}$  进行比较,以及对平行四边形中任意点之间的方差协方差阵进行比较,或者根据误差椭球的轴半径或根据  $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$  关于  $(\Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j)$  的系数矩阵  $A$ ,可以得到如下结论:

(1)由3个不在同一线上的空间点所构成的三角平面中,其内部任意点的精度至少要高于3个角点其中一点的精度;

(2)当点落在三角平面的边上时( $u=0$ 或 $w=0$ ),其估计精度的方法实际上是对空间直线上任意点的不确定性进行估计,其精度至少要高于用于确定该直线元的两控制点中一个点的精度;

(3)当点落在三角平面的外面时,精度就会降低,而且离三角平面距离越远,精度就越低;

(4)对于空间平面上任意点的误差椭球三轴半径及其方向的变化规律较为复杂,它不仅与控制点的方差协方差有关,也与它在平面内的位置有关.

## 2 空间三角平面的面积不确定性

由3个不在同一平面上的3个空间控制点可以构成一个空间三角平面,其面积公式为:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} \quad (6)$$

也可以写成

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} l &= (y_1 - y_0)(z_2 - z_0) - (y_2 - y_0)(z_1 - z_0); \\ m &= (x_1 - x_0)(z_2 - z_0) - (x_2 - x_0)(z_1 - z_0); \\ n &= (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) \end{aligned}$$

则三角平面面积的误差为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{1}{4S} (a_1 \cdot \Delta x_0 + a_2 \cdot \Delta y_0 + a_3 \cdot \Delta z_0 + \\ & b_1 \cdot \Delta x_1 + b_2 \cdot \Delta y_1 + b_3 \cdot \Delta z_1 + \\ & c_1 \cdot \Delta x_2 + c_2 \cdot \Delta y_2 + c_3 \cdot \Delta z_2) \quad (8) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= -(z_2 - z_1)m - (y_2 - y_1)n; \\ a_2 &= -(z_2 - z_1)l - (x_2 - x_1)n; \\ a_3 &= (y_2 - y_1)l + (x_2 - x_1)m; \\ b_1 &= (z_2 - z_0)m - (y_2 - y_0)n; \\ b_2 &= (z_2 - z_0)l - (x_2 - x_0)n; \\ b_3 &= -(y_2 - y_0)l - (x_2 - x_0)m; \\ c_1 &= -(x_1 - x_0)m - (y_1 - y_0)n; \\ c_2 &= -(z_1 - z_0)l + (x_1 - x_0)n; \end{aligned}$$

$$c_3 = (y_1 - y_0)l + (x_1 - x_0)m;$$

三角平面面积的二阶矩

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{16S^2} \mathbf{BD}_{xx} \mathbf{B}^T \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{B} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ c_1 \ c_2 \ c_3]$

若已知 3 点的坐标及其方差协方差阵, 就可以估算出这个三角平面面积的不确定性. 沿用表 1 的数据, 通过 Matlab 编程算得:

面积:  $S = 1\ 722.9e + 003$

面积的方差:  $\sigma_s^2 = 0.0011$

### 3 空间三角平面法向量的不确定性

由不在同一直线上的空间 3 点可确定一个平面, 则该平面的法向量方向的余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{2S}; \cos \beta = -\frac{m}{2S}; \cos \chi = \frac{n}{2S} \quad (10)$$

$$\Delta \alpha = \frac{\rho}{2S} (\cot \alpha \cdot \Delta S - \csc \alpha \cdot \Delta l);$$

$$\Delta \beta = \frac{\rho}{2S} (\cot \beta \cdot \Delta S - \csc \beta \cdot \Delta m);$$

$$\Delta \chi = \frac{\rho}{2S} (\cot \chi \cdot \Delta S - \csc \chi \cdot \Delta n);$$

其中

$$\Delta l = -(z_2 - z_1)\Delta y_0 + (y_2 - y_1)\Delta x_0 + (z_2 - z_0)\Delta y_1 - (y_2 - y_0)\Delta x_1 - (z_1 - z_0)\Delta y_2 + (y_1 - y_0)\Delta x_2$$

$$\Delta m = -(z_2 - z_1)\Delta x_0 + (x_2 - x_1)\Delta z_0 + (z_2 - z_0)\Delta x_1 - (x_2 - x_0)\Delta z_1 - (z_1 - z_0)\Delta x_2 + (x_1 - x_0)\Delta z_2$$

$$\Delta n = -(y_2 - y_1)\Delta x_0 + (x_2 - x_1)\Delta y_0 + (y_2 - y_0)\Delta x_1 - (x_2 - x_0)\Delta y_1 - (y_1 - y_0)\Delta x_2 + (x_1 - x_0)\Delta y_2$$

整理得

$$\Delta \alpha = \frac{\rho}{2S} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{\cot \alpha \cdot a_1}{4S} \cdot \Delta x_0 + \left[ \frac{\cot \alpha \cdot a_2}{4S} + \csc \alpha \cdot (z_2 - z_1) \right] \cdot \Delta y_0 + \left[ \frac{\cot \alpha \cdot a_3}{4S} - \csc \alpha \cdot (y_2 - y_1) \right] \cdot \Delta z_0 + \right. \\ & \left. \frac{\cot \alpha \cdot b_1}{4S} \cdot \Delta x_1 + \left[ \frac{\cot \alpha \cdot b_2}{4S} + \csc \alpha \cdot (z_2 - z_0) \right] \cdot \Delta y_1 + \left[ \frac{\cot \alpha \cdot b_3}{4S} - \csc \alpha \cdot (y_2 - y_0) \right] \cdot \Delta z_1 + \right. \\ & \left. \frac{\cot \alpha \cdot c_1}{4S} \cdot \Delta x_2 + \left[ \frac{\cot \alpha \cdot c_2}{4S} + \csc \alpha \cdot (z_1 - z_0) \right] \cdot \Delta y_2 + \left[ \frac{\cot \alpha \cdot c_3}{4S} - \csc \alpha \cdot (y_1 - y_0) \right] \cdot \Delta z_2 \right\} \quad (11)$$

$$\Delta \beta = \frac{\rho}{2S} \left\{ \begin{aligned} & - \left[ \frac{\cot \beta \cdot a_1}{4S} + \csc \beta \cdot (z_2 - z_1) \right] \cdot \Delta x_0 - \frac{\cot \beta \cdot a_2}{4S} \cdot \Delta y_0 - \left[ \frac{\cot \beta \cdot a_3}{4S} - \csc \beta \cdot (x_2 - x_1) \right] \cdot \Delta z_0 \\ & - \left[ \frac{\cot \beta \cdot b_1}{4S} + \csc \beta \cdot (z_2 - z_0) \right] \cdot \Delta x_1 - \frac{\cot \beta \cdot b_2}{4S} \cdot \Delta y_1 - \left[ \frac{\cot \beta \cdot b_3}{4S} - \csc \beta \cdot (x_2 - x_0) \right] \cdot \Delta z_1 \\ & - \left[ \frac{\cot \beta \cdot c_1}{4S} + \csc \beta \cdot (z_1 - z_0) \right] \cdot \Delta x_2 - \frac{\cot \beta \cdot c_2}{4S} \cdot \Delta y_2 - \left[ \frac{\cot \beta \cdot c_3}{4S} - \csc \beta \cdot (x_1 - x_0) \right] \cdot \Delta z_2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\Delta \chi = \frac{\rho}{2S} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{\cot \chi \cdot a_1}{4S} + \csc \chi \cdot (y_2 - y_1) \right] \cdot \Delta x_0 + \left[ \frac{\cot \chi \cdot a_2}{4S} - \csc \chi \cdot (x_2 - x_1) \right] \cdot \Delta y_0 + \frac{\cot \chi \cdot a_3}{4S} \cdot \Delta z_0 + \right. \\ & \left. \frac{\cot \chi \cdot b_1}{4S} - \csc \chi \cdot (y_2 - y_0) \right] \cdot \Delta x_1 + \left[ \frac{\cot \chi \cdot b_2}{4S} - \csc \chi \cdot (x_2 - x_0) \right] \cdot \Delta y_1 + \frac{\cot \chi \cdot b_3}{4S} \cdot \Delta z_1 + \right. \\ & \left. \left[ \frac{\cot \chi \cdot c_1}{4S} + \csc \chi \cdot (y_1 - y_0) \right] \cdot \Delta x_2 + \left[ \frac{\cot \chi \cdot c_2}{4S} - \csc \chi \cdot (x_1 - x_0) \right] \cdot \Delta y_2 + \frac{\cot \chi \cdot c_3}{4S} \cdot \Delta z_2 \right\} \quad (13)$$

其中,  $\rho$  为以“m”为单位的常数.

空间三角平面法向量的方差协方差阵

$$\begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{a,\beta} & \sigma_{a,\chi} \\ \sigma_{\beta,a} & \sigma_\beta^2 & \sigma_{\beta,\chi} \\ \sigma_{\chi,a} & \sigma_{\chi,\beta} & \sigma_\chi^2 \end{bmatrix} = \left( \frac{\rho}{2S} \right) \cdot \mathbf{BD}_{xx} \mathbf{B}^T \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{B}$  可用与式(7)相同的推导方式得出.

若已知三空间点的坐标及其点的方差协方差阵, 则可估算出该空间三角平面法向量方向的不确定性. 沿用以上表 1 的控制点坐标及其方差协方差数据, 通过编程即可算得以下的方差协方差阵:

$$\begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{a,\beta} & \sigma_{a,\chi} \\ \sigma_{\beta,a} & \sigma_\beta^2 & \sigma_{\beta,\chi} \\ \sigma_{\chi,a} & \sigma_{\chi,\beta} & \sigma_\chi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.19 & 0.72 & -3.04 \\ 0.65 & 7.71 & -2.03 \\ -2.82 & -2.13 & 5.65 \end{bmatrix}$$

### 4 结论

对于空间离散点, 采用空间平行四边形(不在同一直线或同一平面上的 3 个空间点)来估计 3 点周围小范围的点精度不失为有效的方法, 用其不仅可以估计空间三角平面内任意一点的不确定性, 也可

以估计空间三角平面的边上任意点以及三角平面外小范围内的任意点的不确定性,同时还可对其面积和法向量的不确定性进行估算。

对于二维平面三角网的空间数据不确定性,由于它实际上是三维立体三角网的空间数据不确定性在某个平面(通常在平面 $xoy$ )上的投影,因此,该方法对于二维平面上点的不确定性估计同样不失为有效的方法。

### 参考文献

- 1 刘大杰,史文中,董小华等. GIS空间数据的精度分析与质量控制[M]. 上海:上海科学技术文献出版社,1999.
- 2 黄幼才,刘文宝,李宗华等. GIS空间数据误差和处理[M]. 北京:中国地质大学出版社,1995.
- 3 刘大杰,刘春. GIS空间数据不确定性与质量控制的研究[J]. 测绘工程,2001,10(1):6~10.
- 4 戴洪磊. 矢量GIS中位置不确定性度量与传播的理论和方法[D]. 武汉:武汉测绘科技大学,2000.
- 5 杜道生,王占宏,马聪丽. 空间数据质量模型研究[J]. 中国图象图形学报,2000,5A(7):559~562.

- 6 刘文宝,戴洪磊,徐洋林等. GIS中平面方位误差环的解析模型[J]. 测绘学报,1998,27(4):338~344.
- 7 易善枋,李琦. 3D-GIS数据表示和空间插值方法研究[J]. 中国图象图形学报,1999,4A(8):697~701.
- 8 武汉测绘科技大学测量平差教研室. 测量平差基础(第三版)[M]. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,1996.



**蔡剑红** 1977年生,2003年获桂林工学院硕士学位,现为武汉大学遥感信息工程学院博士研究生. 主要研究领域为遥感与地理信息系统数据质量及信息可视化。



**文鸿雁** 1963年生,1988年获中南工业大学工程测量硕士学位,现任桂林工学院教授,硕士生导师,正攻读武汉大学测绘学院博士学位. 主要研究领域为精密工程测量与专题信息系统、空间数据质量控制。